

I) عموميات.

1- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من جزء I من \mathbb{N} نحو \mathbb{R}
 $u: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \rightarrow u(n)$

ترميز:

* نرمز ل $u(n)$ بالرمز u_n .

* نرمز للمتتالية u بالرمز: $(U_n)_{n \in I}$

* u_n يسمى الحد ذا المد n .

ملاحظة:

1- لا يجب الخلط بين: $(U_n)_{n \in I}$ التي تمثل التطبيق u و u_n الذي يمثل عدد حقيقي.

و $\{U_n\}_{n \in I}$ التي تمثل مجموعة القيم التي تأخذها المتتالية.

2- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ منتهية إذا كانت I منتهية ونقول إنها غير منتهية إذا كانت I غير منتهية.

أمثلة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $U_n = \sqrt{n^2 + 1}$

لدينا: $u_0 = 1$; $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{5}$; $u_3 = \sqrt{10}$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $U_n = (-1)^n$

$u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = 1$; $u_3 = -1$

$\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{-1, 1\}$

ملاحظة:

يمكن لمتتالية أن تكون معرفة بالعباراة الصريحة لحددها العام أو بالترجع وذلك حينما يتم حساب حد ما بالرجوع إلى حدود سابقة.

أمثلة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

لدينا: $u_1 = 2u_0 - 3 = -1$

$u_2 = 2u_1 - 3 = -5$

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$

لدينا: $u_2 = 2u_1 - u_0 = 3$

$u_3 = 2u_2 - u_1 = 4$

2- تساوي متتاليتين

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n \in I}$ و $(V_n)_{n \in J}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان:
 $\begin{cases} I = J \\ (\forall n \in I) u_n = v_n \end{cases}$

3- العمليات على المتتاليات:

نعرف مجموع وجداء متتاليتين وضرب عدد في متتالية كما يلي:

$$(U_n)_{n \in I} + (V_n)_{n \in I} = (U_n + V_n)_{n \in I}$$

$$(U_n)_{n \in I} \cdot (V_n)_{n \in I} = (U_n \cdot V_n)_{n \in I}$$

$$\lambda (U_n)_{n \in I} = (\lambda U_n)_{n \in I}$$

4- المتتالية الدورية:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$ إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي غير

منعدم p بحيث $(\forall n \geq n_0) U_{n+p} = U_n$

- أصغر عدد p يحقق الشرط يسمى دور المتتالية.

مثال:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

لدينا: $(\forall n \geq n_0) u_{n+6} = \cos\left(\frac{(n+6)\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\frac{n\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = U_n$$

إذن (U_n) دورية دورها 6.

II) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$:

مكبورة، إذا وفقط إذا كان: $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) u_n \leq M$

مصغورة، إذا وفقط إذا: $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in I) m \leq u_n$

محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني:

$$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall n \in I) m \leq u_n \leq M$$

ملاحظة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in I}$ محدودة إذا وفقط إذا:

$$(\exists M > 0)(\forall n \in I) |u_n| \leq M$$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ بحيث $u_n = \frac{1}{n}$

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) n \geq 1$

يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < \frac{1}{n} \leq 1$

إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 < u_n \leq 1$

إذن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ محدودة.

2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

لدينا: $|u_n| = \frac{1}{n^2 + 1}$

ولدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 \geq 0$

$$n^2 + 1 \geq 1$$

يعني: $\frac{1}{n^2 + 1} \leq 1$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث $u_n = 3n - 4$
 لندرس رتبة (U_n) :
 لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 4 - (3n - 4) = 3n - 1 - 3n + 4 = 3 > 0$
 إذن (U_n) تزايدية قطعاً.

2- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$
 لندرس الرتبة:
 وجدنا سابقاً أن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 2$
 - لندرس رتبة (U_n)

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$$

لدينا: $= \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$

لندرس إشارة: $-u_n^2 + u_n + 2$
 لندرس إشارة: $-x^2 + x + 2$
 $\Delta = 9$

$$x_2 = -1 \quad ; \quad x_1 = 2$$

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2 + x + 2$		-	+	-

ولدينا $u_n \geq 2$ إذن: $-u_n^2 + u_n + 2 \leq 0$
 ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$
 إذن (U_n) تناقصية.

طريقة أخرى:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - \sqrt{u_{n-1} + 2}$
 $= \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}}$
 إذن إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي إشارة $u_n - u_{n-1}$:
 إذن $u_{n+1} - u_n$ له إشارة ثابتة هي إشارة $u_1 - u_0$
 ولدينا: $u_1 - u_0 = \sqrt{5} - 3 < 0$
 إذن $u_{n+1} - u_n < 0$
 ومنه (U_n) تناقصية.

(IV) دراسة بعض المتتاليات الترجعية:

1- المتتاليات الحسابية:

(a) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r
 بحيث $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = u_n + r$
 - العدد r يسمى أساس هذه المتتالية.
 و u_0 الحد الأول لهذه المتتالية.

ملاحظة:

- تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان الفرق بين حدين متتابعين ثابتاً وهذه الثابتة هي الأساس.
 - كل متتالية حسابية تكون معرفة بعددها الأول وأساسها. أو بعدها وأساسها.

يعني: $|u_n| \leq 1$
 إذن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة.

3- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$

لنبين أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مصغورة ب 2:

يعني: $(\forall n \in \mathbb{N}) 2 \leq u_n$

نستعمل الاستدلال بالتراجع:

لدينا من أجل $n = 0$; $u_0 = 3 \geq 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفترض أن الخاصية صحيحة من أجل n يعني $u_n \geq 2$

لنبين أنها صحيحة من أجل $n+1$ يعني $u_{n+1} \geq 2$.

لدينا: $u_n \geq 2$

يعني $u_n + 2 \geq 4$

يعني $\sqrt{u_n + 2} \geq 2$

إذن $u_{n+1} \geq 2$

طريقة أخرى:

لدينا: $u_{n+1} - 2 = \sqrt{u_n + 2} - 2$
 $= \frac{(u_n + 2) - 4}{\sqrt{u_n + 2} + 2} = \frac{u_n - 2}{\sqrt{u_n + 2} + 2} \geq 0$

لأن $u_n \geq 2$

إذن $u_{n+1} \geq 2$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq 2$

ومنه $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مصغورة ب 2.

(III) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن $(u_n)_{n \geq n_0}$

تزايدية، إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n \leq u_{n+1}$

تزايدية قطعاً: $(\forall n \geq n_0) u_n < u_{n+1}$

تناقصية: $(\forall n \geq n_0) u_n \geq u_{n+1}$

قطعاً: $(\forall n \geq n_0) u_n > u_{n+1}$

ثابتة إذا وفقط إذا كان: $(\forall n \geq n_0) u_n = u_{n+1}$

ملاحظة:

← من أجل دراسة رتبة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة:

$$u_{n+1} - u_n$$

- إذا كان $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (U_n) تزايدية.

- إذا كان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (U_n) تناقصية.

- إذا كان $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

← نقول إن المتتالية (U_n) رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

← تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$:

- تزايدية: $(\forall p, q \geq n_0) p < q \Rightarrow u_p \leq u_q$

- تناقصية: $p < q \Rightarrow u_p \geq u_q$

- ثابتة: $p < q \Rightarrow u_p = u_q$

أمثلة:

1- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $u_n = -5n + 1$

لنبين أن (U_n) حسابية:

$$U_{n+1} - U_n = -5(n+1) + 1 - (-5n + 1) = -5$$

إذن المتتالية (U_n) أساسها $r = -5$ وحدها الأول: $u_0 = 1$.

2- لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $u_0 = -10$

لنحسب u_5 :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_{n+1} = u_n + 3$$

نعلم أن:

$$u_1 = u_0 + 3 = -7$$

$$u_2 = u_1 + 3 = -4$$

$$u_3 = u_2 + 3 = -1$$

$$u_4 = u_3 + 3 = 2$$

$$u_5 = u_4 + 3 = 5$$

إذن:

(b) خاصية مميزة:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n-1} \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) 2U_n = U_{n+1} + U_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2}$$

خاصية:

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حسابية إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$$

يعني $U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n$

ملاحظة:

تكون الأعداد c و b في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$

(c) الحد العام لمتتالية حسابية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية وحدها الأول u_0 وأساسها r :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = U_n + r$$

نعلم أن:

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

.

.

.

$$u_n = u_{n-1} + r$$

بجمع أطراف المتفاوتات نحصل على:

$$u_n = u_0 + \underbrace{r + r + \dots + r}_n$$

$$u_n = u_0 + nr$$

أي

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0 .

$$(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = U_0 + nr$$

لدينا:

ملاحظة:

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

إذا كان الحد الأول هو u_1 بصفة عامة: إذا كان u_n و u_p حدين من متتالية حسابية أساسها r

فإن $u_n = u_p + (n-p)r$ (ترتيب p غير مهم).

أمثلة:

1- لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_1 = -10$

$$u_1 = -10$$

لنحسب u_{100}

$$u_{100} = u_1 + (100-1)r$$

$$= u_1 + 99r = -10 + 99 \times 4$$

$$= -10 + 396 = 386 = u_{100}$$

2- (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$ و $u_{20} = 100$

لنحسب u_5

لدينا:

$$u_5 = u_{20} + (5-20)r$$

$$= 100 + 45 = 145.$$

و

$$u_0 = u_5 + (0-5)r$$

$$= 145 + 15 = 160.$$

3- (U_n) متتالية حسابية وحدها الأول U_0 وأساسها r بحيث $U_{20} = 100$ و $U_{10} = 30$

$$U_{20} = 100 \text{ و } U_{10} = 30$$

حدد الحد العام:

لنحدد r :

$$u_{20} = u_{10} + (20-10)r$$

$$r = \frac{u_{20} - u_{10}}{10} = \frac{100 - 30}{10}$$

يعني: $r = 7$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_{10} + (n-10)r$$

$$= 30 + 7n - 70$$

$$= 7n - 40$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = 7n - 40$$

(d) مجموع حدود متتابعة متتالية حسابية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_k + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{و } S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_{n-k} + \dots + u_0$$

$$2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_k + u_{n-k}) + \dots + (u_n + u_0)$$

$$u_k = u_0 + kr$$

$$u_{n-k} = u_0 + (n-k)r$$

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + u_0 + nr$$

$$= u_0 + u_n$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}) u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$$

$$2S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \dots + (u_0 + u_n)}$$

2- المتتالية الهندسية:

(a) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث:
 $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = q.u_n$
 q يسمى أساس (U_n) .

ملاحظات:

- * تكون متتالية التي حدودها غير منعدمة هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت.
- * تكون المتتالية هندسية معرفة بأحد حدودها وأساسها.
- * إذا كان $u_0 = 0$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = 0$
- * إذا كان $q = 0$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n = 0$
- * إذا كان $q = 1$ فإن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0$

(b) خاصية مميزة:

تكون المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية إذا وفقط إذا كان:
 $u_{n+1}.u_{n-1} = u_n^2$

ملاحظة:

تكون الأعداد c, b, a في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان:
 $a.c = b^2$

(c) الحد العام لمتتالية هندسية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q \neq 0$ وحدها الأول $u_0 \neq 0$ لنحسب u_n بدلالة n

$$\begin{aligned} \text{لدينا} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} &= qu_n \\ u_1 &= qu_0 \\ u_2 &= qu_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_n &= qu_{n-1} \end{aligned}$$

بضرب أطراف المتساويات نجد:
 $\underbrace{u_n = u_0 \cdot q \cdot q \dots q}_n$

إذن $u_n = u_0 \cdot q^n$
 وهذه العلاقة تبقى صحيحة إذا كان $q = 0$ أو $u_0 = 0$

خاصية:

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مجموعة هندسية أساسها q وحدها الأول u_0
 لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0 \cdot q^n$

ملاحظة:

إذا كان u_1 هو الحد الأول:
 $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

بصفة عامة: إذا كان u_p و u_n حدين من مجموعة هندسية أساسها q
 فإن: $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$ (ترتيب p و n غير مهم).

(d) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0
 لنحسب: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

* إذا كان $q = 1$ فإن: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0$

إذن $S = \underbrace{u_0 + u_0 + \dots + u_0}_{n+1 \text{ مرة}} = (n+1)u_0$

مرة $n+1$

إذن: $2S = (u_0 + u_n)(n+1)$

$$S = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0
 لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{(u_p + u_n)}{2}$$

أمثلة:

(1) أحسب: $S = 43 + 47 + 51 + \dots + 203$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

أساسها $r = 4$ وحدها الأول $u_0 = 43$

نضع $u_n = 203$ ولنحدد

نعلم أن: $u_n = u_0 + nr$

$u_n = 43 + 4n$

إذن $u_n = 203 \Leftrightarrow 4n = 203 - 43$

$$\Leftrightarrow n = \frac{160}{4} = 40$$

إذن $203 = u_{40}$

إذن: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{40} = (40+1) \frac{u_0 + u_{40}}{2}$

$$= 41 \cdot \frac{43 + 203}{2}$$

إذن $S = 5043$

(2) لنحسب $S = 1 + 2 + \dots + n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

أساسها $r = 1$ وعدد حدوده هو n .

إذن $S = n \cdot \frac{1+n}{2}$

أي $1 + 2 + \dots + n = n \left(\frac{1+n}{2} \right)$

(3) لنحسب $S = 2 + 4 + \dots + 2n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

أساسها $r = 2$ عدد حدوده هو n .

إذن $S = n \cdot \frac{2+2n}{2} = n(1+n)$

إذن توجد متتالية ثابتة وحيدة تحقق (1) هي $u_n = \alpha$ مع $\alpha = \frac{b}{1-a}$

(* لنحدد جميع المتتاليات التي تحقق (1)

لدينا $u_n = \alpha$ تحقق (1) إذن: $\alpha = a\alpha + b$

يعني: $b = \alpha - a\alpha$

(U_n) تحقق (1) $\Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)^*$$

نضع $v_n = u_n - \alpha$

لدينا: $* \Leftrightarrow v_{n+1} = av_n$

إذن (v_n) هندسية أساسها a .

$$v_n = v_0 \cdot q^n \quad \text{إذن}$$

$$v_n = v_0 \cdot a^n \quad \text{أي}$$

$$v_n = (u_0 - \alpha)a^n \quad \text{ويعني}$$

$$v_n = u_n - \alpha \quad \text{ولدينا:}$$

$$u_n = v_n + \alpha \quad \text{يعني}$$

$$u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha \quad \text{يعني}$$

إذن المتتاليات التي تحقق (1) هي $u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$

حيث $x = ax + b$ حل للمعادلة $u_0 \in \mathbb{R}$

خاصية:

من أجل البحث عن جميع المتتاليات التي تحقق

العلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

نقوم بحل المعادلة $x = ax + b$ ليكن α حلها.

نضع $v_n = u_n - \alpha$ ثم نبين أن (v_n) هندسية أساسها سيكون v

نستنتج الحد العام ل (v_n) ثم نستنتج الحد العام ل (u_n) .

مثال:

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

لنحل المعادلة $x = 2x - 3$

$$x = 3 \quad \text{يعني}$$

نضع $v_n = u_n - 3$ لنبين أن (v_n) هندسية.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 \quad \text{لدينا:}$$

$$= 2u_n - 3 - 3$$

$$= 2u_n - 6$$

$$= 2(u_n - 3) = 2v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - 3 = -2$

$$v_n = v_0 \cdot q \quad \text{إذن}$$

$$= -2 \cdot 2^n$$

$$v_n = -2^{n+1}$$

$$u_n = v_n + 3 \quad \text{يعني} \quad v_n = u_n - 3 \quad \text{لدينا}$$

$$u_n = -2^{n+1} + 3 \quad \text{يعني}$$

* إذا كان $q \neq 1$ فإن:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{لدينا:}$$

$$u_k = u_0 q^k \quad \text{ولدينا}$$

$$(1) S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n \quad \text{إذن:}$$

$$(2) qS = u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \dots + u_0 q^n + u_0 q^{n+1}$$

من (1) - (2) نجد:

$$S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1}$$

$$S = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{يعني:}$$

خاصية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; q \neq 1 \\ (n+1)u_0; q = 1 \end{cases}$$

u_0 : الحد الأول للمجموع S .

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{صفة عامة:}$$

أمثلة:

(1) لنحسب: $S = 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + 3 \times 2^n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها

$q = 2$ وعدد حدوده: $n+1$

$$\text{إذن:} \quad S = 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = -3(1 - 2^{n+1}) = 3(2^{n+1} - 1)$$

(2) ليكن $x \neq 1$ لنحسب: $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

نلاحظ أن S هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها

وعدد حدوده $n+1$.

$$\text{إذن:} \quad S = 1 \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\text{إذن} \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

3- المتتالية التي تحقق: $U_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

نعتبر العلاقة $U_{n+1} = au_n + b$ مع $a \neq 1$ و $b \neq 0$

(* لنحدد المتتاليات الثابتة التي تحقق العلاقة (1):

نضع $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = \alpha$

$$((U_n) \text{ تحقق (1)}) \Leftrightarrow u_{n+1} = au_n + b$$

$$\Leftrightarrow \alpha = a\alpha + b$$

$$\Leftrightarrow (1-a)\alpha = b$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{b}{1-a}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1} = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \quad \text{يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{u_n}{v_n} = \gamma \quad \text{هذا يعني أن } \frac{u_n}{v_n} \text{ ثابتة يعني:}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \gamma v_n \quad \text{يعني:}$$

وهذا تناقض لأن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

$$\text{إن } \Delta_0 \neq 0 \text{ ومنه: } (\forall n \in \mathbb{N}) \Delta_n \neq 0$$

إن النظمة (S) تقبل حلا وحيدا. (α, β)

لنبين أن α و β لا يتعلقان ب n :

$$\Delta_n^\alpha = \begin{vmatrix} w_n & v_n \\ w_{n+1} & v_{n+1} \end{vmatrix} = w_n \cdot v_{n+1} - w_{n+1} \cdot v_n$$

بنفس الطريقة نبين أن (Δ_n^α) هندسية أساسها $-b$

$$\Delta_n^\alpha = \Delta_0^\alpha \cdot (-b)^n \quad \text{إن}$$

$$\alpha = \frac{\Delta_n^\alpha}{\Delta_n} = \frac{\Delta_0^\alpha (-b)^n}{\Delta_0 (-b)^n} \quad \text{إن}$$

$$= \frac{w_0 v_1 - w_1 v_0}{u_0 v_1 - u_1 v_0}$$

إن α ثابتة، وبنفس الطريقة نبين أن β ثابتة.

إن يوجد α و β من \mathbb{R} بحيث: $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على

$$\text{شكل } w_n = \alpha u_n + \beta v_n.$$

(b) البحث عن المتتاليات التي تحقق (1):

لنبحث عن المتتاليات الهندسية التي تحقق (1):

لتكن (U_n) أساسها $q \neq 0$ و $u_0 \neq 0$

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 \cdot q^n$$

$$(U_n \text{ تحقق (1)}) \Leftrightarrow u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

$$\Leftrightarrow u_0 \cdot q^{n+2} = a u_0 q^{n+1} + b u_0 q^n$$

$$\Leftrightarrow u_0 \cdot q^n (q^2 - aq - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 - aq - b = 0$$

تعريف:

المعادلة $q^2 - aq - b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للعلاقة (1).

نعتبر إذن المعادلة $q^2 - aq - b = 0$ (E)

$$\Delta = a^2 + 4b$$

إذا كان $\Delta > 0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2 .

إن: $u_n = q_1^n$ و $v_n = q_2^n$ تحققان (1)

$$\text{ولدينا: } \frac{V_n}{U_n} = \left(\frac{q_2}{q_1} \right)^n \neq cte \quad \text{لأن } q_1 \neq q_2$$

إن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

إن المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$$

إذا كان $\Delta = 0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا: $q = \frac{a}{2}$

إن المتتالية $u_n = q^n$ تحقق العلاقة (1)

نضع $v_n = n u_n$ لنبين أن (V_n) تحقق (1)

4- المتتاليات التي تحقق: $b \neq 0, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

نعتبر العلاقة (1): $b \neq 0, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

(a) خاصيات:

خاصية (1):

إذا كانت (u_n) و (v_n) ممتاليتان تحققان العلاقة (1) فإن كل متتالية

على شكل: $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ حيث $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

برهان:

نفترض أن (u_n) و (v_n) تحققان (1)

نضع $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ (مع $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

لنبين أن (w_n) تحقق العلاقة (1):

$$\text{يعني: } w_{n+2} = a w_{n+1} + b w_n$$

$$\text{لدينا: } w_{n+2} = \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2}$$

$$= \alpha (a u_{n+1} + b u_n) + (\beta v_{n+1} + \beta v_n)$$

$$= a (\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + b (\alpha u_n + \beta v_n)$$

$$= a w_{n+1} + b w_n$$

إن (w_n) تحقق (1).

خاصية (2):

إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتين تحققان (1) وغير متناسبتين

(لا يوجد γ بحيث $v_n = \gamma u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) يعني $\frac{v_n}{u_n} \neq cste$) فإن

المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على شكل

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

برهان:

لتكن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين وتحققان (1)

وجدنا من خلال ما سبق أن كل متتالية على شكل:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n \quad \text{تحقق (1).}$$

عكسيا: لتكن (w_n) متتالية تحقق (1)

لنبين أنه يوجد α و β من \mathbb{R} بحيث $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$

$$\text{لدينا: } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_n = \alpha u_n + \beta v_n$$

إن:

$$\begin{cases} w_n = \alpha u_n + \beta v_n \\ w_{n+1} = \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} \alpha u_n + \beta v_n = w_n \\ \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1} = w_{n+1} \end{cases} \quad \text{نحصل إذن على النظمة:}$$

مجاهلها هما α و β :

$$\text{لدينا: } \Delta_n = \begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n+1} & v_{n+1} \end{vmatrix} = u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1}$$

$$\text{لدينا: } \Delta_{n+1} = u_{n+1} v_{n+2} - v_{n+1} u_{n+2}$$

$$u_{n+1} (a v_{n+1} + b v_n) - v_{n+1} (a u_{n+1} + b u_n)$$

$$\Delta_{n+1} = b u_{n+1} v_n - b v_{n+1} u_n$$

$$= -b (u_n v_{n+1} - v_n u_{n+1}) = -b \Delta_n$$

إن (Δ_n) هندسية أساسها $-b$ و $q = -b$ وحدها الأول Δ_0 .

$$\Delta_n = \Delta_0 \cdot q^n = (-b)^n \cdot \Delta_0$$

لنبين أن $\Delta_0 \neq 0$

نفترض العكس يعني $\Delta_0 = 0$

$$\text{إن } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \Delta_n = 0$$

خاصية:

نعتبر العلاقة $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ($b \neq 0$)

لتكن (E): $q^2 - aq - b = 0$ المعادلة المميزة ل (1)

ليكن $\Delta = a^2 + 4b$

إذا كان $\Delta > 0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين مختلفين q_1 و q_2 . وتكون المتتاليات التي تحقق العلاقة (1) هي المتتاليات التي تكتب على

شكل: $w_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ حيث α و β من \mathbb{R} .

إذا كان $\Delta = 0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا q .

وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على

شكل: $w_n = (\alpha + \beta n)q^n$ حيث α و β من \mathbb{R} .

إذا كان $\Delta < 0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين $q = re^{i\theta}$ و \bar{q}

وتكون المتتاليات التي تحقق (1) هي المتتاليات التي تكتب على

شكل: $w_n = r^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)$ (α و β من \mathbb{R}).

تمرين تطبيقي:

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) في الحالات التالية:

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases} \quad -1$$

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad -3$$

1- المعادلة المميزة هي: $q^2 - 5q + 6 = 0$ (E)

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$q_2 = 3 \quad ; \quad q_1 = 2$$

$$u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -1 \end{cases} \quad \text{ولدينا:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -3 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

$$u_n = 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n \quad \text{إذن}$$

$$u_n = 2^{n+2} - 3^{n+1}$$

2- المعادلة المميزة هي: $q^2 - 6q + 9 = 0$ (E)

$$\Delta = 36 - 36 = 0 \quad \text{لنحل (E):}$$

$$q = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{إذن}$$

$$u_n = (\alpha + \beta n) \cdot 3^n \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 3(\alpha + \beta) = 2 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \quad \text{ولدينا:}$$

$$v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \quad \text{يعني}$$

$$v_{n+2} - (av_{n+1} + bv_n) = (n+2)q^{n+2} - a(n+1)q^{n+1} - bq^n \quad \text{لدينا:}$$

$$= nq^{n+2} + 2q^{n+2} - anq^{n+1} - aq^{n+1} - bq^n$$

$$= nq^n (q^2 - aq - b) + q^{n+1} (2q - a) = 0$$

$$\text{لأن } q^2 - aq - b = 0 \text{ و } q = \frac{a}{2}$$

إذن (V_n) تحقق (1).

ولدينا $\frac{V_n}{U_n} = n \neq cste$ إذن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين. وبالتالي

المتتاليات التي تحقق (1) على التي تكتب على شكل:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n$$

$$= \alpha q^n + \beta n \cdot q^n$$

$$w_n = (\alpha + \beta n)q^n \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

إذا كان $\Delta < 0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين في \mathbb{C} هما:

$$\bar{q} \text{ و } q = re^{i\theta}$$

$$q^2 - aq - b = 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$q^{n+2} - aq^{n+1} - bq^n = 0 \quad \text{يعني}$$

$$r^{n+2} \cdot e^{i(n+2)\theta} - ar^{n+1} \cdot e^{i(n+1)\theta} - br^n \cdot e^{in\theta} = 0 \quad \text{يعني}$$

$$\Leftrightarrow r^{n+2} (\cos((n+2)\theta) + i \sin((n+2)\theta))$$

$$- ar^{n+1} (\cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta))$$

$$- br^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow [r^{n+2} \cos((n+2)\theta) - ar^{n+1} \cos((n+1)\theta) - br^n \cos n\theta]$$

$$+ i[r^{n+2} \sin((n+2)\theta) - ar^{n+1} \sin((n+1)\theta) - br^n \sin n\theta] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^{n+2} \cos((n+2)\theta) = ar^{n+1} \cos((n+1)\theta) + br^n \cos n\theta \\ r^{n+2} \sin((n+2)\theta) = ar^{n+1} \sin((n+1)\theta) + br^n \sin n\theta \end{cases} *$$

$$\text{نضع:} \quad u_n = r^n \cos n\theta$$

$$v_n = r^n \sin n\theta \quad \text{و}$$

$$* \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \\ v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \end{cases}$$

$$\text{إذن } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ تحققان العلاقة (1)}$$

$$\text{ولدينا:} \quad \frac{v_n}{u_n} = \tan(n\theta) \neq cste$$

إذن (u_n) و (v_n) غير متناسبتين.

وبالتالي المتتاليات التي تحقق (1) هي:

$$w_n = \alpha u_n + \beta v_n \quad \text{مع } \alpha \text{ و } \beta \text{ من } \mathbb{R}.$$

$$w_n = \alpha (r^n \cos n\theta) + \beta (r^n \sin n\theta)$$

$$= r^n (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) \quad \text{أي}$$

إذن: $(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

إذن: $\lim U_n = +\infty$

بنفس الطريقة نبين أن:

$$(p \in \mathbb{N}^*) \lim n^p = +\infty; \lim \frac{1}{n} = 0; \lim \sqrt[p]{n} = +\infty$$

ملاحظة:

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0 \quad \leftarrow$$

$$\lim (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l \quad \leftarrow$$

$$\lim |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = l \quad \leftarrow$$

$$\text{والعكس خاطئ} \quad \lim u_n = l \Rightarrow \lim |u_n| = |l| \quad \leftarrow$$

مثال: نعتبر $u_n = (-1)^n$

$$\lim |u_n| = 1 \quad \text{إذن} \quad |u_n| = 1$$

لكن (U_n) لا تقبل نهاية.

2- مصادق التقارب:

خاصية:

(1) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $|u_n - l| \leq v_n$ انطلاقاً

من صف ما.

$$\lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = l \quad \text{لدينا:}$$

(2) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث: $u_n \leq v_n$ انطلاقاً من صف

ما:

$$\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim v_n = +\infty$$

$$\lim v_n = -\infty \Leftrightarrow \lim u_n = -\infty$$

(3) لتكن (U_n) و (V_n) و (W_n) ثلاث متتاليات بحيث:

$$w_n \leq u_n \leq v_n \quad \text{انطلاقاً من صف ما.}$$

إذا كانت (U_n) و (W_n) متقاربتين ولهما نفس النهاية l فإن: (u_n)

$$\text{متقاربة و } \lim u_n = l$$

أمثلة:

$$1- \text{ نعتبر المتتالية } U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\text{لدينا: } u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}): \quad \text{لدينا:}$$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{K} \leq \sqrt{n}$$

$$(\forall K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{K}} \leq 1 \quad \text{يعني}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{إذن}$$

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq n \quad \text{يعني}$$

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq n \quad \text{يعني}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n} \leq u_n \quad \text{إذن}$$

$$\lim u_n = +\infty \quad \text{لدينا} \quad \lim \sqrt{n} = +\infty$$

$$2- \text{ نعتبر المتتالية: } U_n = q^n$$

* إذا كان $q > 1$

$$\text{نضع } a = q - 1 \text{ (مع } a > 0 \text{) يعني } q = 1 + a$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{يعني}$$

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) 3^n \quad \text{إذن:}$$

$$3- \text{ المعادلة المميزة هي: } (E): q^2 - q + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \quad \text{لنحل (E):}$$

$$\text{إذن: } q_2 = \bar{q}_1 \quad ; \quad q_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا: } q_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{إذن: } u_n = 1^n \left(\alpha \cos n \frac{\pi}{3} + \beta \sin n \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{يعني: } u_n = \alpha \cos n \frac{\pi}{3} + \beta \sin n \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \beta \sin \frac{\pi}{3} = -2 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -2 \end{cases} \quad \text{ولدينا:}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{-5}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \frac{1}{2} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \beta = -2 \end{cases} \quad \text{يعني:}$$

$$\text{إذن: } u_n = \cos n \frac{\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin n \frac{\pi}{3}$$

V- نهاية متتالية:

1- تعريف

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow U_n > A$$

ونكتب: $\lim U_n = +\infty$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى $-\infty$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall A < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow U_n < A$$

ونكتب $\lim U_n = -\infty$

نقول إن المتتالية (U_n) تؤول إلى العدد الحقيقي l إذا وفقط إذا

$$\text{كان: } (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

ونكتب: $\lim U_n = l$ ونقول في هذه الحالة إن المتتالية (U_n)

متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

مثال:

نعتبر المتتالية: $U_n = \sqrt{n}$

لنبين أن $\lim U_n = +\infty$ يعني: $(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) : n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

ليكن: $A > 0$ لنبحث عن $n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n_0 > A^2$

لدينا $u_n > A$

$$\text{يعني } \sqrt{n} > A \quad \text{يعني } n > A^2$$

يكفي أن نأخذ $n_0 \geq A^2$

$$\text{مثلاً: } n_0 = E(A^2) + 1$$

$$\text{لدينا: } n > n_0 \Rightarrow n > A^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} > A$$

$$\Rightarrow u_n > A$$

$$\lim u_n = \lim v_n \quad \begin{cases} \lim u_n = 0 \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \quad \text{لكن}$$

خاصية (2): مقبولة.

+ كل متتالية تزايدية ومكبورة. متقاربة.
+ كل متتالية تناقصية ومصغورة. متقاربة.

حالة خاصة:

(* كل متتالية تناقصية وموجبة. متقاربة.
(* كل متتالية تزايدية وسالبة. متقاربة.

تمرين تطبيقي:

بين أن (U_n) متقاربة في الحالات التالية:

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad -1$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad -2$$

4- العمليات على المتتاليات المتقاربة.

خاصية:

إذا كانت (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين فإن المتتاليات

(αu_n) , $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$ متقاربة

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$$

$$\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

- وإذا كانت $\lim v_n \neq 0$ فإن $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ متقاربة.

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} \quad \text{و}$$

$$u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \quad \text{مثال: نعتبر المتتالية:}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \lim \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$$

(5) توسيع مفهوم النهاية:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$
l	l'	$l + l'$
l	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
l	l'	ll'
$l \neq 0$	∞	∞ (الإشارة)
∞	∞	∞
0	∞	شكل غير محدد
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$

$$q^n = (1+a)^n \quad \text{لدينا:}$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot a^k = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k$$

$$= C_n^0 \cdot a_0 + C_n^1 \cdot a^1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot a^k = 1 + na + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot a^k$$

$$q^n - (1+na) = \sum_{k=2}^n C_n^k a^k \geq 0 \quad \text{إذن}$$

ولدينا $\lim 1+na = +\infty$ إذن $\lim q^n = +\infty$ إذا كان $q > 1$

فإن $\lim q^n = 1$ إذا كان $-1 < q < 1$ مع $q \neq 0$

$$\lim |q^n| = \lim |q|^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}$$

ولدينا $-1 < q < 1$ يعني $1 > |q|$

يعني $1 > \frac{1}{|q|}$ إذن من خلال ما سبق:

$$\lim \frac{1}{|q|^n} = +\infty$$

$$\lim \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} \quad \text{إذن}$$

ومنه $\lim q^n = 0$

* إذا كان $q \leq -1$

نقبل أن (U_n) لا تقبل نهاية.

خاصية:

$$\lim q^n = \begin{cases} +\infty & ; & q > 1 \\ 1 & ; & q = 1 \\ 0 & ; & -1 < q < 1 \\ & ; & q \leq -1 \end{cases}$$

(3) التقارب والرتابة:

خاصية (1):

لنكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية.
إذا كانت (U_n) متقاربة وموجبة انطلاقاً من صف ما فإن:
 $\lim u_n \geq 0$

استنتاج:

(* لنكن (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين
إذا كانت $u_n \leq v_n$ انطلاقاً من صف ما.
فإن $\lim u_n \leq \lim v_n$

ملاحظة:

(u_n) و (v_n) متقاربتان.
إذا كان $u_n \leq v_n$ فإن $\lim u_n \leq \lim v_n$
 $u_n < v_n \not\Rightarrow \lim u_n < \lim v_n$

$$\text{مثال: } u_n = \frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{لدينا:}$$

لدينا:

$$v_n - u_n = \frac{n! + n + 1}{(1+n)!} = \frac{n!}{(1+n)!} + \frac{n+1}{(1+n)!}$$

$$= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{n!}$$

ولدينا: $(n-1)! \geq 1$ إذن $n! \geq n$ أي

$$0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \quad \text{يعني}$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \quad \text{ولدينا}$$

$$\lim \frac{1}{n!} = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim \frac{1}{1+n} = 0 \quad \text{وأیضا}$$

إذن $\lim (v_n - u_n) = 0$ ومنه (v_n) و (u_n) متحاديان.

VII - المتتاليات الترجعية. $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية:}$$

لندرس سلوك المتتالية (u_n)

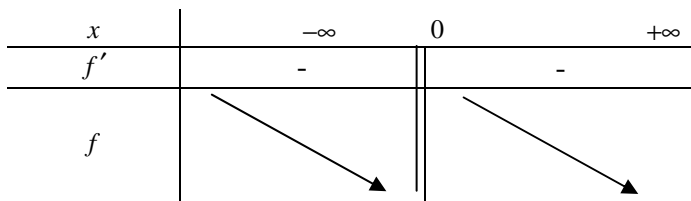
$$\text{نعتبر الدالة: } f(x) = \frac{x+2}{x}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{إذن } (u_n) \text{ تصبح:}$$

لننشئ ξ_f :

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$



$l \neq 0$	0	∞
l	∞	0
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد

VI - المتتاليات المتحادية:

تعريف:

نقول إن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاديان إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq V_n \quad (*)$$

(U_n) $(*)$ تزايدية و (V_n) تناقصية.

$$(*) \quad \lim (V_n - U_n) = 0$$

خاصية:

إذا كانت (U_n) و (V_n) متحاديين فإنهما متقاربتان ولهما نفس النهاية.

برهان: لدينا $U_n \leq V_n$

لدينا (U_n) تزايدية إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_0 \leq u_n$

و (V_n) تناقصية إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n \leq v_0$

لدينا إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

إذن (U_n) تزايدية ومكبورة ب v_0 إذن متقاربة.

(V_n) تناقصية ومصغورة ب u_0 إذن متقاربة.

$$\text{ولدينا } \lim (v_n - u_n) = 0$$

$$\text{يعني } \lim v_n - \lim u_n = 0$$

$$\text{أي } \lim v_n = \lim u_n$$

إذن (u_n) و (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية.

مثال:

$$\text{نعتبر المتتاليتين: } u_n = \frac{n}{1+n} \quad ; \quad v_n = 1 + \frac{1}{n!}$$

لنبين أن (u_n) و (v_n) متحاديان.

لدينا:

$$v_n - u_n = 1 + \frac{1}{n!} - \frac{n}{1+n}$$

$$= \frac{(1+n)! + (1+n) - n(n!)}{(1+n)!} = \frac{(1+n)n! + (1+n) - n(n!)}{(1+n)!}$$

$$= \frac{n! + n + 1}{(1+n)!} > 0$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < v_n \quad \text{إذن}$$

* لدينا:

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{(1+n)!} - 1 - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{(n+1)} - 1 \right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{-n}{n+1} \right) < 0$$

إذن (v_n) تناقصية.

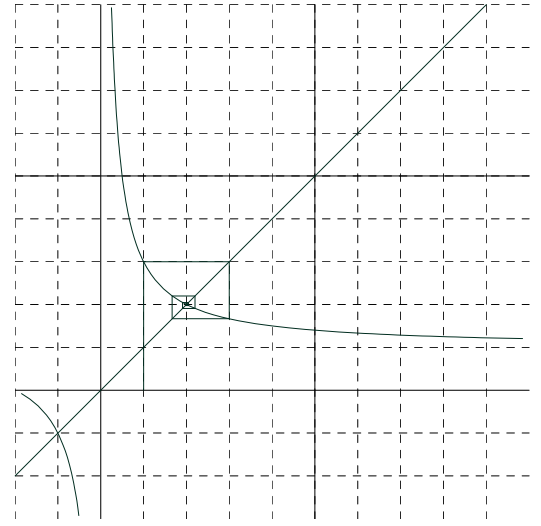
* لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$$

إذن (u_n) تزايدية.

* لنحسب: $\lim (v_n - u_n)$



من خلال التمثيل المبين يتبين أن سلوك المتتالية كالتالي:
 - (U_n) ليست رتيبة.

- (U_n) مصغرة ب u_0 ومكبورة ب u_1

- (u_2) تؤول إلى 2 الذي هو حل المعادلة $f(x) = x$

- المتتالية: $v_n = u_{2n}$ تزايدية.

- المتتالية: $w_n = u_{2n+1}$ تناقصية.

- $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n < w_n$

- (v_n) و (w_n) متحاديان.

ثم نقوم بالبرهان على هذه النتائج.

خاصية:

لتكن f دالة معرفة على مجال I ونعتبر المتتالية:

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

إذا كانت f متصلة على I و (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق

$$f(l) = l$$